ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЗАДАЧ «ЦИФРОВОЙ» ЭКОНОМИКИ В НЕЧЕТКИХ УСЛОВИЯХ

*Царькова Е.В.**

Ключевые слова: *управленческие решения, информационная неопределённость, математические модели, нечеткие задачи, оптимальные стратегии, критерий.*

Аннотация.

Цель работы: *совершенствование научно-методической базы теории принятия оптимальных управленческих решений в условиях цифровой экономики.*

Метод: *математическое моделирование экономико-правовых отношений в цифровой экономике и системный анализ современных экономических моделей и решений в многокритериальных нечетких задачах.*

Результаты: *проанализированы новые тенденции принятия управленческих решений в условиях развития информатизации, проведен содержательный анализ современных гибких нечетких экономических моделей; предложен подход к решению семейства экономических задач поиска оптимального по рискам и сожалениям решения с учетом информационной неопределённости ограничений; приведен метод, учитывающий разнотипные критерии, определенные в количественной или качественной форме; проведен анализ вариантов на основе парных сравнений; показан алгоритм поиска решения в чистых стратегиях для нечеткой модели однократно проводимой матричной игры, т.е. достижения целей с той или иной степенью при определенной степени выполнения ограничений.*

DOI:10.21681/1994-1404-2019-1-18-28

Математическое обеспечение экономических информационных систем как совокупность математических методов и алгоритмов, позволяющих решать задачи с применением ЭВМ, является эффективным инструментом управления экономическим объектом с применением динамической информационной модели экономической системы, отражающей ее состояние в любой момент времени и предназначенной для оперативного формирования и выдачи полной, объективной и достоверной информации, необходимой для принятия управленческих решений.

Формирование единого общегосударственного информационно-правового пространства, создание условий и предпосылок для организации и осуществления международного сотрудничества в области цифровизации экономики и правовой информатизации, развитие информационно-аналитической сферы и сферы информационно-правовых услуг требует повышения оперативности, обоснованности и корректности принимаемых решений по регулированию различных сфер общественной жизни за счет информатизации деятельности [6 – 10, 22]. В ситуации с современными информационными технологиями существенно меняется взаимодействие законов развития техники и социальной среды, скорость развития аппаратных и программно-технологических средств определенным образом диктует отношения в информационном обществе.

Интеллектуальные системы обработки и представления знаний в настоящее время развиваются по пути интеграции символьных и образных представлений научных знаний, что в сочетании с высоким уровнем современных аппаратно-программных средств мультимедиа имеет большое практическое значение, в частности для распознавания вводимой информации с обеспечением высокой скорости ее обработки, для решения актуальной проблемы перевода информации с бумажных носителей в электронные.

Традиционное понимание термина «управленческое решение» как волевого указания руководителя организации по выбору варианта деятельности ее персонала при максимальной степени достижении поставленной цели в условиях цифровой экономики заменяется значением: процесс выработки и принятия наилучшего варианта (альтернативы) для решения возникшей проблемы или задачи при научном обосновании оптимизации принимаемого решения и практической эффективности, предполагающем предварительное изучение целей и средств действия, которые обеспечивают максимальную степень достижения цели управления (рис. 1). Другими словами, оптимальные решения – это наилучшие компромиссы, найденные в результате тщательного анализа и сравнения всех альтернатив.

* ***Царькова Елена Валентиновна****, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационного права, информатики и математики Российского государственного университета правосудия, Российская Федерация, г. Москва.*

E-mail: e.v.tsarkova@mail.ru

Управленческое решение как управляющее воздействие на функционирование предприятия нацелено на перспективу, в будущее, поэтому в момент принятия решения не всегда возможно предсказать результат предпринимаемого действия и уровень обеспечения достижения цели, стоящей перед организацией.

Рис.1. Процесс принятия управленческих решений

Программируемые решения, т.е. традиционные, неоднократно встречавшиеся в практике управления, принимаются по типичным ситуациям и определяют правила принятия решений в будущем на основании сформулированных алгоритмов принятия таких решений и безусловного их исполнения. *Непрограммируемые* нестандартные решения носят разовый, творческий характер и связаны с уникальными, неопределенными ситуациями и стратегическим планированием. Для них невозможно составить конкретный алгоритм необходимых действий, необходимо разрабатывать оригинальную процедуру принятия решения.

Управленческие решения обладают различными характеристиками по значимости цели (стратегические или тактические), степени повторяемости, длительности реализации, возможности корректировки последствий либо необратимости, количеству критериев, степени полноты и достоверности используемой информации: детерминированные, т.е. принятые в условиях определённости, или вероятностные, принятые в условиях риска или неопределённости (рис. 2, рис. 3).

Методы экономико-математического моделирования базируются на использовании математических моделей для решения наиболее часто встречающихся управленческих задач. Как один из основных принципов системного моделирования рассматривается *многомодельность* [11]. Вместо поиска «правильной модели», которой может не оказаться среди имеющихся вариантов описания изучаемого явления, результаты представляют не одной, а множеством моделей, в противовес единой модели строится «тезаурус» - унифицированный ряд моделей, который расширяет условия применимости математического описания. Многомодельность в настоящее время характерна для большинства экономических и технических наук.

Одним из методов моделирования оценки воздействия принятого решения на конкурентов является теория игр, решающая проблему выбора оптимальной стратегии, учитывающей возможные действия противника. В экономике игровые модели используются для прогнозирования реакции рынка на изменение цен, чтобы не попасть в невыгодное положение в конку-

Рис. 2. Выбор способа принятия решения в условиях риска и неопределенности

Рис. 3. Классификация методов принятия решения по областям применения

рентной борьбе, новые кампании поддержки сбыта, предложения дополнительного обслуживания, модификацию и освоение новой продукции [18, 20, 21].

Помимо детерминированных и стохастических задач возникают ситуации, где необходимо оценивать ситуацию и принимать решение в условиях неточной информации или при наличии нечетких целей и ограничений [1, 2, 4, 18]. Методы нечеткой логики [5], теории нечетких множеств и отношений в настоящее время широко применяются при моделировании систем управления и распознавания. Аппарат нечеткой математики позволяет формализовать и преобразовывать количественно нечеткие (качественные) понятия, которыми оперирует эксперт при описании своих представлений о реальной системе, своих рекомендаций, пожеланий, целей управления. Человеческий разум в отличие от машинного оперирует при оценке ситуаций нечеткими категориями. Поэтому при разработке и создании автоматизированных систем управления, распознавания и принятия решений использование нечеткого подхода имеет ряд преимуществ.

Традиционное программирование делает взгляд на мир «черно-белым»: булева переменная может принимать только два значения («0» – «1» или «нет» – «да»), а вещественная – строго определенное в оговоренном диапазоне с фиксированной длиной мантиссы и др. Истина лежит посередине, а крайние точки лишь задают её границы. В управлении нечеткими, размытыми процессами приходится искать решение нечетких задач с помощью строго детерминированных математических методов и четких компьютерных алгоритмов. В сфере анализа систем принятия решений и управления сложными организационными и технологическим процессами активно применяются методы нечеткой логики и нечетких алгоритмов, причем психологическими особенностями человеко-машинного диалога жестко лимитируется время отклика на запрос пользователя, а управление технологическими процессами должно согласовываться с реальным масштабом времени производственных процессов.

Нечеткие модели по сравнению с традиционными являются более гибкими, поскольку в большей степени позволяют учитывать опыт и интуицию специалиста в определенной области; более адекватными моделируемой, создаются в тех случаях, когда построение четких невозможно или затруднительно и позволяют получать решение, по точности сопоставимое с исходными данными. Нечеткие модели создаются в тех случаях, когда построение четких невозможно или затруднительно.

При построении математических моделей и при исследовании реальных систем значительная часть информации об этой системе получена от людей, имеющих опыт работы с ней и знающих ее особенности (экспертов), и носит субъективный характер. Представление информации в естественном языке содержит большое число неопределенностей типа «много», «низкий», «очень продуктивный» и др., не находящих выражения на языке цифр и не имеющих аналогов в терминах традиционной математики. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет формализовать модель, соответствующую реальной ситуации.

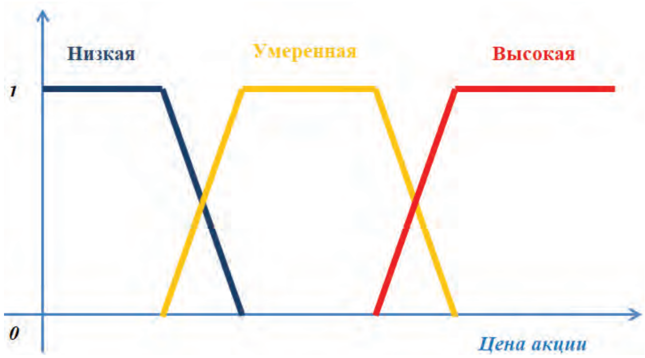

Рис. 4. Описание нечеткой лингвистической переменной «цена акции»

Нечеткий подход к моделированию систем управления и распознавания использует так называемые «лингвистические» переменные [5] либо вместо числовых переменных (рис. 4), либо в дополнение к ним; простые отношения между переменными описываются с помощью нечетких высказываний; сложные отношения описываются нечеткими алгоритмами.

Один из простейших способов математического описания нечеткого множества – характеристика степени принадлежности элемента множеству числом, например, из интервала [0,1]. Пусть X – некоторое множество элементов. Нечетким множеством A в X называется совокупность пар вида (x, $\mu_A(x)$), где $x \in X$, а μ_A – функция $x \to$ [0,1], называемая *функцией принадлежности* нечеткого множества A. Значение $\mu_A(x)$ этой функции для конкретного x называется степенью принадлежности этого элемента нечеткому множеству A.

Нечеткое множество вполне описывается своей функцией принадлежности, поэтому можно использовать эту функцию как обозначение нечеткого множества. *Например*, в универсальном множестве X нечеткое множество A, обозначающее множество чисел, близких к 10, задается функцией принадлежности $\mu_A(X)=(1+|x-10|^m)^{-1}$, $m \in N$.

Обычные множества составляют подкласс класса нечетких множеств. Действительно, функцией принадлежности обычного множества $B \subset X$ является его характеристическая функция: $\mu_B(x)=1$, если $x \in B$ и $\mu_B(x)=0$, если $x \notin B$. Тогда в соответствии с определением нечеткого множества обычное множество B можно также определить как совокупность пар вида (x, $\mu_B(x)$). То есть нечеткое множество представляет собой более широкое понятие, чем обычное множество, в том смысле, что функция принадлежности нечеткого множества может быть, вообще говоря, произвольной функцией или даже произвольным отображением.

Нечеткое множество называется пустым, если его функция принадлежности равна нулю на всем множестве X, т.е. $\mu_0(x)=0$. Универсальное множество X также можно описать функцией принадлежности вида $\mu_X(x)=1$ для всех $x \in X$.

Объединением нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество $A \cup B$ с функцией принадлежности вида [5]:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max_{x\in X}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Пересечением нечетких множеств A и B в X называется нечеткое множество $A \cap B$ с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min_{x\in X}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Дополнением нечеткого множества A в X называется нечеткое множество $\bar{A}$ с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X.$$

Разность нечетких множеств и в определяется как нечеткое множество A-B с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A-B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x) \text{ при } \mu_A(x) \ge \mu_B(x) \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Нечетким отношением R на множестве X называется нечеткое подмножество декартова произведения $X \times X$, характеризующееся функцией принадлежности вида $\mu_R(x,y)$: $X \times X \to [0;1]$. Значение $\mu_R(x,y)$ этой функции понимается как субъективная мера или степень выполнения отношения $(x,y) \in R$.

Объединение и пересечение нечетких отношений определяются аналогично. Дополнением в X отношения R называется нечеткое отношение $\bar{R}$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_{\bar{R}}(x,y)=\mu_R(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$.

Нечеткое отношение R на множестве X называется рефлексивным, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $\mu_R(x,x)=1$, и антирефлексивным, если $\mu_R(x,x)=0$ при любом $x \in X$, симметричным при $\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$ для любых $x,y \in X$.

В теории нечетких множеств применяется процедура *дефаззификации* (от англ. *fuzzy* – нечеткий), т.е. процедура преобразования нечеткого множества в четкое число, аналогичная нахождению характеристик (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности, однако этот способ применим только для одноэкстремальных функций принадлежности.

Например, дефаззификация дискретного нечеткого множества $\bar{A} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_A(u_i)}{u_i}$ по методу *центра тяжести* осуществляется по формуле

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{k} u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_A(u_i)},$$

а для непрерывного множества $\tilde{A} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mu_A(u)}{u} du$ – по формуле

$$a = \frac{\int_{u_1}^{u_2} u\mu_A(u)du}{\int_{u_1}^{u_2} \mu_A(u)du}$$

(наименование метода обусловлено тем, что физическим аналогом формулы является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества).

Дефаззификация нечеткого множества по методу *медианы* состоит в отыскании числа a, для которого

$$\int_{u_1}^{a} \mu_A(u)du = \int_{a}^{u_2} \mu_A(u)du.$$

Геометрический смысл: нахождение точки а такой, что вертикальная прямая, проходящая через эту точку, делит на две равные части площадь криволинейной трапеции под кривой функции принадлежности. По методу *центра максимумов*

$$a = \frac{\int_G u du}{\int_G du},$$

где G – это множество элементов $u \in [u_1,u_2]$, имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству $\tilde{A}$.

Во всех формулах видно, что если функция принадлежности имеет единственный максимум, то его координата и является четким аналогом нечеткого множества.

При практическом использовании моделей для оптимизации актуален вопрос о выборе из имеющегося набора альтернативных математических описаний наиболее полно отвечающего целям моделирования. Выбор осуществляется на основании определенных критериев качества, причем *критерием адекватности моделей* служит не только соответствие расчетных данных опытным, но и степень удовлетворения результатов моделирования поставленным при создании моделей целям и прагматический аспект, т.е. возможность прогноза нужных для практики характеристик.

Обычно задачей математического программирования является задача отыскания экстремумам некоторой целевой функции на допустимом множестве альтернатив. Целевая функция представляет одно из свойств альтернатив таких, как стоимость, ценность, полезность и пр. При нечеткой постановке задачи нечеткость может содержать как в определении функции цели, так и в описании допустимого множества альтернатив, поэтому возникают различные типы задач нечеткого математического программирования (НМП):

- задача НМП на нечетком множестве допустимых альтернатив;
- задача достижения нечетко поставленной цели при четких ограничениях;
- задача достижения нечетко поставленной цели при нечетких ограничениях;
- задача, допускающая незначительные нарушения ограничений и др.

Рассмотрим типичную задачу математического программирования: составить план производства, обеспечивающих получение максимальной прибыли в условиях ограниченности ресурсов. Планом производства в модели является неотрицательный набор переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которого $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$ при наличии ограничений:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k, \\
{}_{1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \cdots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
{}_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \\
\qquad\qquad x_j \ge 0, j = \overline{1,n}.
\end{array}
$$

Коэффициенты a_{ij} выражают удельные затраты *i*-го ресурса на единицу продукции *j*-го типа, c_i– цена реализации *i*-го вида продукции.

Ресурсы могут быть израсходованы полностью (что соответствует равенствам в системе ограничений) или частично (соответствует неравенствам). При решении двойственной задачи учитывается, что оценка ресурсов, затрачиваемых на выпуск готовой продукции, должна быть не меньше оценки единицы готовой продукции, т.е. $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \ge c_j$ для всех $j = 1,2, \dots, n$. Пост-оптимизационный анализ экономических задач линейного программирования рассмотрен в [19].

Множество *X* допустимых планов определено системой ограничений. Будем считать неопределенным доход y_i от реализации единицы *i*-го вида продукции, известны лишь граничные значения, зависящие от будущего состояния рыночных цен, спроса и др.

В задаче поиска оптимального управления в рамках анализируемой системы потребуется задать определенные критерии с целью оптимизировать необходимые показатели. Пусть уже выделено *N* критериев, формализующих издержки или потери применительно к рассматриваемым процессам. Такие исходно заданные критерии называют частными критериями (чтобы отличать их от критерия выбора, на основе которого затем будет найдено оптимальное решение в формате задачи многокритериальной оптимизации). Задача многокритериальной оптимизации рассматривается как задача одновременной оптимизации всех частных критериев. Требуется найти точку $x \in X$, которая в некотором смысле оптимизирует (минимизирует) все эти критерии. Идеальной ситуацией при решении задач многокритериальной оптимизации является случай, когда пересечение множеств оптимальных решений для всех частных критериев не является пустым. Если указанное множество не является пустым, то принадлежащие ему альтернативы называют абсолютными решениями. В реальных ситуациях такой счастливый исход практически невозможен. Обычно указанное множество (множество абсолютных решений) является пустым.

В практических ситуациях обычно не существует решения, минимизирующего (оптимизирующего) одновременно все частные критерии. Кроме того, одни частные критерии могут противоречить другим. Поэтому приходится искать наилучшее в некотором смысле компромиссное решение. Для его нахождения вводят дополнительный критерий выбора, который учитывает предпочтения ЛПР. Такое компромиссное решение ищут в классе так называемых эффективных по Парето решений (иначе называемых переговорным множеством). Оптимальное по Парето решение $x^* \in X$ отличается тем, что в множестве *X* допустимых альтернативных решений не найдется ни одного другого решения, переход к которому от x^* позволит улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, чтобы при этом не ухудшились бы показатели других частных критериев [11, 15]. Множество оптимальных по Парето решений совпадает с множеством абсолютных решений, если оно не пусто.

Для дискретного множества альтернативных решений каждую альтернативу можно характеризовать оценками частных критериев.

Сформулируем задачу линейного программирования при неопределенности:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \to max,$$
$$\begin{cases} x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in X, \\ 0<a_i\le y_i\le b_i, \\ x_i\ge 0, i=1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Целевая функция $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ есть суммарный доход от реализации всей продукции при неопределенности цен.

Результат реализации плана можно оценивать, вводя количественную меру, в качестве которой могут служить выигрыши от принимаемого решения (плана); потери от принимаемого решения; полезность, риск и другие количественные критерии.

Опишем оптимальное по рискам и сожалениям решение. Риски и сожаления считаем стратегическими, т.е. функциями выбранной стратегии (решения) *x*. Пусть *Y* – множество разброса цен:

$Y=\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n): a_i\le y_i\le b_i, i=1,2,\dots,n\}$.

Для лица, принимающего решение (ЛПР) на основании критерия Вальда, стратегический риск вычисляется как [12, 13]:

$R_V(x)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)-\min_{y\in Y} f(x,y)$,

по критерию Сэвиджа стратегическое сожаление

$R_S(x)=\max_{y\in Y} r(x,y)-\min_{x\in X}\max_{y\in Y} r(x,y)$,

где функция сожаления определяется равенством:

$r(x,y)=\max_{x\in X} f(x,y)-f(x,y)$.

Все приведенные здесь минимумы и максимумы существуют в силу непрерывности функций $f(x,y)$ и $r(x,y)$ на компактных множествах *X* и *Y*, функции $R_V(x)$ и $R_S(x)$ тоже непрерывны. Обозначая $f_V[x]=\min_{y\in Y} f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, выразим гарантированный суммарный доход от реализации оптимального по Вальду («пессимистического») плана x_V^*:

$$f_V[x^*]=\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)=\max_{x\in X}\sum a_i x_i$$

План x_V^* является решением оптимизационной задачи при нижнем уровне цен a_i, т.е.задачи

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to max,$$
$$\begin{cases} x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in X, \\ x_i\ge 0, i=1,2,\dots,n. \end{cases}$$

Величина стратегического риска по критерию Вальда

$$R_V[x]=f_V[x_V^*]-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

При рассмотрении задачи оптимизации при нечетко поставленной цели в нечетких условиях считают равноправными цели принятия решений и множество альтернатив как нечеткие подмножества некоторого универсального множества альтернатив.

Пусть *X*-универсальное множество альтернатив – универсальное множество альтернатив, т.е. универсальная совокупность всевозможных выборов ЛПР. Нечеткой целью является нечеткое подмножество *X*, которое обозначим *G*. Нечеткая цель описывается функцией принадлежности $\mu_G: X\to[0,1]$ из $F(X)=\{\mu|\mu: X\to[0;1]\}$. Нечетким ограничением является нечеткое подмножество X, которое обозначим C. Описывается нечеткое ограничение функцией принадлежности $\mu_C: X\to[0,1]$ из $F(X)=\{\mu|\mu: X\to[0;1]\}$.

Чем больше степень принадлежности альтернативы *x* нечеткому множеству цели μ_G, т.е. чем ближе к единице значение $\mu_G(x)$, тем больше степень достижения этой цели при выборе альтернативы x в качестве решения. Аналогично для ограничений.

Решить задачу значит достигнуть цели и удовлетворить ограничениям, причем при нечеткой постановке речи идет не просто о достижении цели, а об ее достижении с той или иной степенью при определенной степени выполнения ограничений.

Задача достижения нечетко поставленной цели по Беллману-Заде [3] решается на основе принципа слияния: нечетким решением является нечеткое подмножество *D* множества *X*, получающее в результате слияния нечетких целей и нечетких ограничений ЛПР, $\mu_D=\mu_G*\mu_C$, где * – некоторая бинарная операция в *F(X)*. Если у ЛПР имеется n нечетких целей и *m* ограничений, то нечеткое решение имеет вид:

$\mu_D=\mu_{G_1}*\mu_{G_2}*\dots*\mu_{G_n}*\mu_{C_1}*\mu_{C_2}*\dots*\mu_{C_m}$

и является пересечением I (*взятием минимума*) нечетких множеств целей и ограничений $\mu_{D_I}=\mu_{G_1}\wedge\mu_{G_2}\wedge\dots\wedge\mu_{G_n}\wedge\mu_{C_1}\wedge\mu_{C_2}\wedge\dots\wedge\mu_{C_m}$ или пересечением II (*перемножением*) нечетких множеств целей и ограничений $\mu_{D_{II}}=\mu_{G_1}\cdot\mu_{G_2}\cdot\dots\cdot\mu_{G_n}\cdot\mu_{C_1}\cdot\mu_{C_2}\cdot\dots\cdot\mu_{C_m}$ или их линейной комбинацией:

$$\mu_{D_{III}}=\sum_{i=1}\alpha_i\mu_{G_i}+\sum_{j=1}\beta_j\mu_{C_j};\ \alpha_i,\beta_j\ge 0;\ \sum_{i=1}\alpha_i+\sum_{j=1}\beta_j=1.$$

Для $\forall x\in X$ справедливо неравенство $\mu_{D_{II}}(x)\le\mu_{D_I}(x)\le\mu_{D_{III}}(x)$.

При определении нечеткого множества часто используется формула

$$\mu_D=\frac{\mu_G\mu_C}{\gamma+(1-\gamma)(\mu_G+\mu_C-\mu_G\mu_C)}.$$

Пусть, например, некоторая альтернатива *x* обеспечивает достижение цели со степенью $\mu_G(x)$ и удовлетворяет ограничениям (принадлежит допустимому множеству) со степенью $\mu_C(x)$. Тогда в соответствии с подходом Беллмана-Заде степень принадлежности этой альтернативы решению задачи равна минимальному из этих чисел. *Например*, альтернатива, допустимая со степенью 0,2 и обеспечивающая достижение цели со степенью 0,7, принадлежит нечеткому решению со степенью 0,2.

Таким образом, нечетким решением задачи достижения нечеткой цели называется пересечение нечетких множеств цели и ограничений, т.е. тоже нечеткое множество *D*, функция принадлежности которого μ_D имеет вид:

$\mu_D(x)=min\{\mu_G(x),\mu_C(x)\}$.

При наличии нескольких целей и ограничений нечеткое решение описывается функцией принадлежности:

$\mu_D(x) = min\ \{\mu_{G1}(x),\ldots, \mu_{Gn}(x), \mu_{C1}(x),\ldots, \mu_{Cn}(x)\}$.

Оптимальной в смысле подхода Беллмана-Заде будет альтернатива x^*, для которой $\mu_D(x)$ максимальна:

x^*: $\mu_D(x^*)=max\ \mu_D(x)$, $x\in X$.

В матричных играх в основе принципа *наилучшего гарантированного результата* [12, 13] лежит предположение о том, что наиболее рациональным выбором варианта действий первым игроком является тот, при котором он рассчитывает на наихудшую для себя из всех возможных реакцию второго игрока.

Другой принцип рациональности в играх с противоположными интересами опирается на понятие *ситуации равновесия по Нэшу* [10] и применяется в тех случаях, когда есть возможность договариваться и вырабатывать обоюдовыгодное совместное решение. В ситуациях устойчивого равновесия нарушение договоренности в одностороннем порядке не выгодно ни одному из игроков. Недостатком этого принципа является наличие нескольких ситуаций равновесия, привлекательность которых по-разному оценивается участниками, а также то, что равновесия, как правило, не обладают устойчивостью.

Активный игрок ориентируется на получение наибольшего гарантированного результата («лучшего из худших»), если он полагается целиком на свои возможности. Если же условия неопределенности меняются и появляется какая-либо информации о поведении другого игрока, то величина гарантированного выигрыша меняется. Например, если игрок ***A*** может первым выбрать свою стратегию и сообщает об этом игроку ***B***, то наибольший гарантированный выигрыш игрока ***A*** равен

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\mu_{D_1}(x,y) = \max_{x\in X}\left\{\mu^1(x), \min_{y\in Y}\mu_G^1(x,y)\right\}.$$

Рассмотрим поиск решения в чистых стратегиях для нечеткой модели однократно проводимой матричной игры считая, что игра не является антагонистической, содержит элементы неопределенности, выраженные в лингвистической форме и не имеющими выражения в терминах теории вероятностей. Предположим, что изучающий эксперимент не проводится.

Если в игре учитываются разнотипные критерии, определенные в количественной или качественной форме, то в основе решения лежит анализ вариантов на основе парных сравнений (см., например, [16]).

Пусть игрок ***A*** (его считаем активным игроком, т.е. ЛПР) имеет в своем распоряжении *m* стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, у игрока ***B*** имеется n стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Чем больше игроку A известно об интересах и ограничениях игрока *B*, тем «у́же» множество возможных реакций второго игрока, т.е тем меньше неопределенность в его поведении с точки зрения первого игрока.

Для каждой стратегии $B_j, j = 1,2, \ldots, n$ известна величина $g_j, j = 1,2, \ldots, n$, выражающая степень уверенности о том, что 2-й игрок выберет стратегию B_j. Задан в количественной или качественной форме (используются лингвистические переменные типа «низкий», «средний», «высокий» или «хорошо», «плохо», «недостаточно соответствует» и др.) набор критериев $\{J^q\}, q = 1,2, \ldots, l$. Для нечетких множеств критерии задаются функцией принадлежности.

Для того чтобы упорядочить элементы множества $A_1, A_2, \ldots, A_m$, оценим варианты поведения игрока на основании парных сравнений:

– по выбранному критерию вариант A_k примерно такой же, как вариант A_s;
– по выбранному критерию вариант A_k несколько лучше, как вариант A_s;
– по выбранному критерию вариант A_k намного лучше, как вариант A_s и т.п.

Функция принадлежности нечетких множеств определяется на основе экспертной информации о парных сравнениях вариантов с применением 9-балльной шкалы Саати [17], учитывающей психологическую способность человека удерживать в памяти одновременно 7±2 понятий. Ранжирование критериев на основе пересечения нечетких множеств производится по схеме Беллмана-Заде.

Пусть число $\mu_{ij}^q \in [0; 1]$ характеризует уровень оценки стратегии A_i по критерию J_q, если противник применяет стратегию B_j. Чем больше степень принадлежности стратегии A_i нечеткому множеству цели μ_{ij}^q, т.е. чем выше оценка данной альтернативы по критерию J_q, тем ближе к единице число μ_{ij}^q и тем больше степень достижения этой цели при выборе альтернативы A_i в качестве решения.

Тогда нечеткое множество, представляющее критерий J_j^q, можно задать как $J_j^q = \{\mu_{1j}^q, \mu_{2j}^q, \ldots, \mu_{mj}^q\}$, а матрица парных сравнений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} w_{11}^q & w_{12}^q & \ldots & w_{1m}^q \\ w_{21}^q & w_{22}^q & \ldots & w_{2m}^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1}^q & w_{m2}^q & \ldots & w_{mm}^q \end{pmatrix},$$

где элемент w_{sk}^q $(s = 1,2, \ldots, m; k = 1,2, \ldots, m)$ $w_{sk}^q = 0$, если объекты несравнимы, и получает значение от 1 до 9 по шкале Саати на основании экспертных оценок :

$w_{sk}^q = 1$, если стратегия A_k не имеет преимущества над стратегией A_s;

$w_{sk}^q = 3$, если стратегия A_k имеет небольшое преимущества над стратегией A_s;

$w_{sk}^q = 5$, если стратегия A_k имеет существенное преимущества над стратегией A_s;

$w_{sk}^q = 7$, если стратегия A_k имеет явное преимущества над стратегией A_s;

$w_{sk}^q = 9$, если стратегия A_k имеет абсолютное преимущества над стратегией A_s.

Числами 2, 4, 6, 8 выражают промежуточные оценки; $w_{sk}^q = 0$, если объекты несравнимы.

При использовании указанной шкалы ЛПР, сравнивая два объекта в смысле достижения цели, расположенной на вышележащем уровне иерархии, должен поставить в соответствие этому сравнению число в интервале от 1 до 9 или обратное значение чисел. В тех случаях, когда трудно различить столько промежуточных градаций от абсолютного до слабого предпочтения или этого не требуется в конкретной задаче, может использоваться шкала с меньшим числом градаций. В пределе шкала имеет две оценки: 1 – объекты равнозначны; 2 – предпочтение одного объекта над другим.

Матрица парных сравнений обладает свойствами:

Элементы главной диагонали равны 1, $w_{ss}^{q} = 1$.

Элементы, симметричные относительно главной диагонали, взаимно обратны $w_{sk}^{q} = \left(w_{ks}^{q}\right)^{-1}$.

Заполнение квадратных матриц парных сравнений осуществляется по следующему правилу. Если элемент A_k доминирует над элементом A_s, то клетка матрицы, соответствующая строке A_k и столбцу A_s, заполняется целым числом, а клетка, соответствующая строке и столбцу , заполняется обратным к нему числом. Если элемент A_s доминирует над A_k, то целое число ставится в клетку, соответствующую строке A_s и столбцу A_k, а дробь проставляется в клетку, соответствующую строке A_k и столбцу A_s. Если элементы и равнопредпочтительны, то в обе позиции матрицы ставятся единицы.

Таким образом, матрица парных сравнений $w_{sk}^{q} = \left(w_{ks}^{q}\right)^{-1}$обладает свойством обратной симметрии, т. е. , шкала оценок содержит элементы {1/9, 1/8,…,1/2, 1, 2, 3,….,8,9}. При заполнении матрицы парных сравнений достаточно выполнить $\frac{n(n-1)}{2}$сравнений, остальные элементы находятся из соотношений $w_{sk}^{q} = \frac{1}{w_{sk}^{q}}$.

Транзитивность сравнений: $w_{sk}^{q} = w_{st}^{q}$.

Эти свойства позволяют определить все элементы матрицы по элементам одной какой-либо строки. Если известна *i*-я строка, то $w_{sk}^{q} = \frac{w_{ik}^{q}}{w_{ik}^{q}}$.

Степени принадлежности нечеткому множеству можно вычислить по формуле $\mu_{ij}^{q} = \frac{1}{w_{i1}^{q}+w_{i2}^{q}+\dots+w_{in}^{q}}, i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n.$

При проведении попарных сравнений следует отвечать на следующие вопросы: какой из двух сравниваемых элементов важнее или имеет большее воздействие, какой более вероятен и какой предпочтительнее. При сравнении критериев обычно спрашивают, какой из критериев более важен; при сравнении альтернатив по отношению к критерию – какая из альтернатив более предпочтительна или более вероятна.

После составления таких матриц при выборе противником стратегии B_j можно проранжировать каждую стратегию A_i для каждого критерия J_j^{q}.

Ранжирование элементов, анализируемых с помощью матрицы парных сравнений, осуществляется на основании главных собственных векторов. Рассмотрим выбор на основе *метода взвешенной суммы* оценок частных критериев.

Пусть, например, матрица парных сравнений по первому критерию имеет вид

$$V1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Для квадратной матрицы *A* число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор *X*–собственным вектором, если $AX = \lambda X$. Для отыскания собственных значений необходимо найти корни уравнения $det(A - \lambda E) = 0$. При вычислении максимального собственного значения матриц порядка больше двух практически всегда требуется прибегать к приближенным методам, что существенно усложняет задачу, так как в случае одной иерархии число матриц парных сравнений может быть очень велико, и исследователем, не владеющим численными методами, метод иерархической иерархии может быть отклонен. Используем *метод вычисления собственного вектора*, предложенный Саати, т.е формулу:

$$w_i^{*} = (v_{i1} \cdot v_{i2} \cdot \dots \cdot v_{in})^{1/n};\ i = 1,2, \dots, n\ .$$

Тогда

$$w_1^{*} = (1 \cdot 5 \cdot 7)^{1/3} = 3{,}271;$$

$$w_2^{*} = \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 3\right)^{1/3} = 0{,}843;$$

$$w_3^{*} = \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\right)^{1/3} = 0{,}362.$$

Нормируя по формуле $w_i^{*} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$, получаем: $W1^{*} = \{0{,}731; 0{,}188; 0{,}081\}$.

Полученный главный собственный вектор ранжирует альтернативы и назначает им веса. Таким образом, *первая* альтернатива наиболее предпочтительная, затем идет *вторая* и *третья*. Сумма координат полученного вектора равна единице, поэтому можно говорить об относительной важности того или иного сравниваемого критерия или альтернативы. Итак, приоритеты по первому критерию $w_1(1;1) = 0{,}731; w_2(1;1) = 0{,}188;\ w_3(1;1) = 0{,}081.$

Пусть по *второму* критерию матрица парных сравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix},$$

тогда $W2^{*} = \{0{,}419; 0{,}436; 0{,}145\}$,

и приоритеты по второму критерию $w_1(1;2) = 0{,}419; w_2(1;2) = 0{,}436;\ w_3(1;2) = 0{,}145.$

Пусть важность критериев оценивали две группы экспертов и по мнению экспертов первой группы матрица парных сравнений для критериев имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, тогда веса критериев $(1;1) = 0{,}667; c(1;2) = 0{,}333$ т.е первый критерий по мнению экспертов первой группы в два раза более значим, чем второй. Мнения экспертов второй группы привели к матрице $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, отсюда веса критериев $c(2;1) = 0{,}25; c(2;2) = 0{,}75$, т.е второй критерий в 3 раза значимее первого.

Для уровня квалификации экспертных групп матрица парных сравнений $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому мнение экспертов второй группы важнее мнения экспертов первой группы, веса групп $c(1) = 0{,}2; c(2) = 0{,}8$.

Итоговый вес *первой* стратегии

$$w_1 = c(1) \cdot [c(1;1) \cdot w_1(1;1) + c(1;2) \cdot w_1(1;2)] +$$
$$+c(2) \cdot [c(2;1) \cdot w_1(2;1) + c(2;2) \cdot w_1(2;2)] =$$
$$= 0{,}2 \cdot [0{,}667 \cdot 0{,}731 + 0{,}333 \cdot 0{,}419] + 0{,}8 \cdot [0{,}25 \cdot 0{,}731 + 0{,}75 \cdot 0{,}419]$$
$$= 0{,}517;$$

для *второй* и *третьей* стратегий

$$w_2 = 0{,}2 \cdot [0{,}667 \cdot 0{,}188 + 0{,}333 \cdot 0{,}436] + 0{,}8 \cdot [0{,}25 \cdot 0{,}188 + 0{,}75 \cdot 0{,}436]$$
$$= 0{,}346;$$
$$w_3 = 0{,}2 \cdot [0{,}667 \cdot 0{,}081 + 0{,}333 \cdot 0{,}145] + 0{,}8 \cdot [0{,}25 \cdot 0{,}081 + 0{,}75 \cdot 0{,}145]$$
$$= 0{,}121.$$

Таким образом, оптимальной является *первая* стратегия.

Заметим, что если для матрицы V_1 находить собственные значения традиционным методом из уравнения $det(A - \lambda E) = 0$, то получим $\lambda_1 = -3{,}065$; $\lambda_2 = -0{,}032$; $\lambda_3 = -0{,}032$. Соответствующий наибольшему собственному значению собственный вектор $\{0{,}963; 0{,}248; 0{,}108\}$ нормирован в обычном смысле (сумма квадратов координат равна 1), а если для нормировки использовать формулу $w_i^* = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$, то получим вектор $\{0{,}731; 0{,}188; 0{,}081\}$, полностью соответствующий полученным результатам.

Рецензент: ***Сухов Андрей Владимирович,*** *доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиоэлектроники, телекоммуникаций и нанотехнологий Московского авиационного института (национального исследовательского университета), г. Москва, Россия.*
E-mail: avs57@mail.ru

Литература

1. Ващекин А. Н. Применение математических методов теории нечетких множеств при моделировании принятия решений в экономической и правовой сфере // Экономика. Статистика. Информатика. Вестник УМО. – 2013. – № 6. – С. 18 – 21.
2. Ващекин А. Н., Ващекина И. В. Нечеткий алгоритм распределения судебных дел в суде первой инстанции: формализация и математическое моделирование // Правовая информатика. – 2017. – № 3. – С. 43 – 49.
3. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. – М.: Знание, 1974.
4. Исаев Р. А. Модифицированный метод парных сравнений для экспертной оценки параметров нечеткой когнитивной модели // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2016. – Т. 12. – № 2. – С. 35 – 42.
5. Королев В. Т., Ловцов Д. А., Радионов В. В. Системный анализ. Часть. 2. Логические методы / Под ред. Д. А. Ловцова. – М.: Росс. гос. ун-т правосудия, 2017. – 164 с.
6. Ловцов Д. А. Развитие информационной сферы общественно-производственной деятельности: достижения, угрозы безопасности и правовое регулирование // Государство и право в новой информационной реальности: Сб. науч. тр. / Отв. ред. Е. В. Алферова, Д. А. Ловцов.– М.: ИНИОН РАН, 2018. – С. 15 – 37.
7. Ловцов Д. А., Ниесов В. А. Проблемы и принципы системной модернизации «цифрового» судопроизводства // Правовая информатика. – 2018. – № 2. – С. 15 – 22.
8. Ловцов Д. А. Системология правового регулирования информационных отношений в инфосфере: Монография. – М.: Росс. гос. ун-т правосудия, 2016. – 316 с.
9. Ловцов Д. А., Ниесов В. А. Формирование единого информационного пространства судебной системы России // Российское правосудие. – 2008. – № 11. – С. 78 – 88.
10. Ловцов Д. А. Проблема эффективности международно-правового обеспечения глобального информационного обмена // Наука и образование: хозяйство и экономика; предпринимательство; право и управление. – 2011. – № 11 (17). – С. 24 – 31.
11. Ловцов Д. А. Системный анализ. Часть. 1. Теоретические основы. – М.: Росс. гос. ун-т правосудия, 2018. – 224 с.
12. Ловцов Д. А. Системология правового регулирования информационных отношений в инфосфере: архитектура и состояние // Государство и право. – 2012. – № 8. – С. 16 – 25.
13. Ловцов Д. А. Системология научных исследований. – М.: НЦПИ при Минюсте РФ, 2018. – 76 с.
14. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. – М.: Из-во «Лань», 2010.
15. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
16. Ротштейн А. П., Штовба С. Д. Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений// Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – №3. – С.150 – 154.
17. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989.
18. Царькова Е. В. Математические модели конфликтных ситуаций в условиях неопределенности // Математические методы решения инженерных задач.– М: ВА им. Петра Великого, 2013. – С.99 – 115.

19. Царькова Е. В. Пост-оптимизационный анализ экономических задач линейного программирования // Тр. 2-й Всеросс. науч.-прак. конф. «Тенденции и перспективы государственного управления социально-экономическим развитием регионов и территорий» (17 ноября 2017 г.) / РГУП. – М.: Росс. гос. ун-т правосудия, 2018. – С. 151 – 160.
20. Царькова Е. В. Применение дифференциальных уравнений для исследования рынка с прогнозируемыми ценами // Актуальные проблемы современной когнитивной науки: Сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. (10 февраля 2018 г.). Часть 2 / НИЦ «Аэтерна». – Саратов: «Аэтерна», 2018.– С. 18 – 23.
21. Царькова Е. В. Равновесия в экономических моделях статических и динамических игр // Новая наука: Опыт, традиции, инновации: Сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. (12 февраля 2017 г.) / ООО «Агенство научных исследований». – Т. 2. – № 2. – Уфа: ООО «АНИ», 2017. – С. 17 – 21.
22. Царькова Е. В. Оптимизация «цифровой» экономики: анализ чувствительности и информационной неопределенности // Правовая информатика. – 2018. – № 3. – С. 16 – 24.

INFORMATION AND MATHEMATICAL SUPPORT OF "DIGITAL" ECONOMY TASKS UNDER FUZZY CONDITIONS

Elena Tsar'kova, *Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor at the Department of Information Technology Law, Informatics and Mathematics of the Russian State University of Justice, Moscow, Russian Federation.*
E-mail: *e.v.tsarkova@mail.ru*

Keywords: *management decision-making, information uncertainty, mathematic models, fuzzy tasks, fuzzy situations, optimal strategies, fuzzy conditions, criterion.*

Absract.

Purpose of the work: *improving the scientific and methodological basis for the theory of optimal management decision-making under the conditions of digital economy.*

Method used: *mathematical modelling of economic and legal relations in the digital economy and system analysis of modern economic models and solutions in multi-criteria fuzzy tasks.*

Results obtained: *new trends in management decision-making under the conditions of development of informatisation were analysed; a substantial analysis of modern flexible fuzzy economic models was carried out; an approach to solving a group of economic problems of search for a decision optimalising risks and regrets under the conditions of information uncertainty of restrictions was put forward; a method considering criteria of different kind defined in qualitative or quantitative forms is given; an analysis of variants based on pairwise comparisons was carried out; an algorithm of decision search in pure strategies for a fuzzy model of a once played matrix game, that is, achieving goals to a certain degree under the conditions of a certain degree of satisfaction of limitations.*

References

1. Vashchekin A. N. Primenenie matematicheskikh metodov teorii nechetkikh mnozhestv pri modelirovanii priniatiia reshenii v ekonomicheskoi i pravovoi sfere, Ekonomika. Statistika. Informatika. Vestnik UMO, 2013, No. 6, pp. 18-21.
2. Vashchekin A. N., Vashchekina I. V. Nechetkii algoritm raspredeleniia sudebnykh del v sude pervoi instantsii: formalizatsiia i matematicheskoe modelirovanie, Pravovaia informatika, 2017, No. 3, pp. 43-49.
3. Zade L. Osnovy novogo podkhoda k analizu slozhnykh sistem i protsessov priniatiia reshenii, M. : Znanie, 1974.
4. Isaev R. A. Modifitsirovannyi metod parnykh sravnenii dlia ekspertnoi otsenki parametrov nechetkoi kognitivnoi modeli, Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie, 2016, t. 12, No. 2, pp. 35-42.
5. Korolev V. T., Lovtsov D. A., Radionov V. V. Sistemnyi analiz. Chast'. 2. Logicheskie metody, pod red. D. A. Lovtsova, M.: Ross. gos. un-t pravosudiia, 2017, 164 pp.
6. Lovtsov D. A. Razvitie informatsionnoi sfery obshchestvenno-proizvodstvennoi deiatel'nosti: dostizheniia, ugrozy bezopasnosti i pravovoe regulirovanie, Gosudarstvo i pravo v novoi informatsionnoi real'nosti : sb. nauch. tr., otv. red. E. V. Alferova, D. A. Lovtsov, M. : INION RAN, 2018, pp. 15-37.
7. Lovtsov D. A., Niesov V. A. Problemy i printsipy sistemnoi modernizatsii "tsifrovogo" sudoproizvodstva, Pravovaia informatika, 2018, No. 2, pp. 15-22.
8. Lovtsov D. A. Sistemologiia pravovogo regulirovaniia informatsionnykh otnoshenii v infosfere : monografiia, M. : Ross. gos. un-t pravosudiia, 2016, 316 pp.

9. Lovtsov D. A., Niesov V. A. Formirovanie edinogo informatsionnogo prostranstva sudebnoi sistemy Rossii, Rossiiskoe pravosudie, 2008, No. 11, pp. 78-88.
10. Lovtsov D. A. Problema effektivnosti mezhdunarodno-pravovogo obespecheniia global'nogo informatsionnogo obmena, Nauka i obrazovanie: khoziaistvo i ekonomika; predprinimatel'stvo; pravo i upravlenie, 2011, No. 11 (17), pp. 24-31.
11. Lovtsov D. A. Sistemnyi analiz. Chast'. 1. Teoreticheskie osnovy, M. : Ross. gos. un-t pravosudiia, 2018, 224 pp.
12. Lovtsov D. A. Sistemologiia pravovogo regulirovaniia informatsionnykh otnoshenii v infosfere: arkhitektura i sostoianie, Gosudarstvo i pravo, 2012, No. 8, pp. 16-25.
13. Lovtsov D. A. Sistemologiia nauchnykh issledovanii, M. : NTsPI pri Miniuste RF, 2018, 76 pp.
14. Mazalov V. V. Matematicheskaia teoriia igr i prilozheniia, M. : Lan', 2010.
15. Podinovskii V. V., Nogin V. D. Pareto-optimal'nye resheniia mnogokriterial'nykh zadach, M. : Nauka, 1982.
16. Rotshtein A. P., Shtovba S. D. Nechetkii mnogokriterial'nyi analiz variantov s primeneniem parnykh sravnenii, Izvestiia RAN, Teoriia i sistemy upravleniia, 2001, No. 3, pp. 150-154.
17. Saati T. L. Priniatie reshenii. Metod analiza ierarkhii, M. : Radio i sviaz', 1989.
18. Tsar'kova E. V. Matematicheskie modeli konfliktnykh situatsii v usloviiakh neopredelennosti, Matematicheskie metody resheniia inzhenernykh zadach, M. : VA im. Petra Velikogo, 2013, pp. 99-115.
19. Tsar'kova E. V. Post-optimizatsionnyi analiz ekonomicheskikh zadach lineinogo programmirovaniia, Tr. 2-i Vseross. nauch.-prak. konf. "Tendentsii i perspektivy gosudarstvennogo upravleniia sotsial'no-ekonomicheskim razvitiem regionov i territorii" (17 noiabria 2017 g.), RGUP, M. : Ross. gos. un-t pravosudiia, 2018, pp. 151-160.
20. Tsar'kova E. V. Primenenie differentsial'nykh uravnenii dlia issledovaniia rynka s prognoziruemymi tsenami, Aktual'nye problemy sovremennoi kognitivnoi nauki : sb. nauch. tr. Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (10 fevralia 2018 g.), chast' 2, NITs "Aeterna", Saratov : "Aeterna", 2018, pp. 18-23.
21. Tsar'kova E. V. Ravnovesiia v ekonomicheskikh modeliakh staticheskikh i dinamicheskikh igr, Novaia nauka: Opyt, traditsii, innovatsii : sb. nauch. tr. Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (12 fevralia 2017 g.), OOO "Agenstvo nauchnykh issledovanii", t. 2, No. 2, Ufa : OOO "ANI", 2017, pp. 17-21.
22. Tsar'kova E. V. Optimizatsiia "tsifrovoi" ekonomiki: analiz chuvstvitel'nosti i informatsionnoi neopredelennosti, Pravovaia informatika, 2018, No. 3, pp. 16-24.